Infinitesimi.

$f, g : A \to \mathbb{R}$

$x_0 \in Acc(A)$

Def: Si dice che f è o-piccolo di g per $x \to x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

e si scrive $f(x) = o(g(x))$

Es: $f(x) = x^3$

$g(x) = x^2 \qquad x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^3 = o(x^2)$$

Se non è specificato diversamente si intende $x \to 0$.

Def: Si dice che f è infinitesima di ordine superiore ad $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$

se $f = o(x^\alpha)$

per $x \to 0$.

cioè $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^\alpha} = 0$

Es: $f(x) = tg\,x \cdot \sin x$

$f(x) = o(x)$ perché?

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg\,x \cdot \sin x}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{tg \cdot x}_{\to 0} \cdot \overbrace{\frac{\sin x}{x}}^{\text{limitato}} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$\Rightarrow \quad \frac{\sin x}{x}$ è limitata vicino a $\emptyset$.

Attenzione.

$$\left.\begin{aligned} x^3 &= o(x) \\ x^4 &= o(x) \end{aligned}\right\} \not\Rightarrow x^3 = x^4$$

Proprietà degli o-piccoli

1) Se $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ $\Rightarrow k\,o(x^\alpha) = o(x^\alpha)$

2) $o(x^\alpha) + o(x^\alpha) = o(x^\alpha)$

3) Se $\beta > 0 \Rightarrow x^{\alpha+\beta} = o(x^\alpha)$

4) $a(x^{\alpha}) + a(x^{\alpha+\beta}) = a(x^{\alpha})$

5) $a(a(x^{\alpha})) = a(x^{\alpha})$

6) $a(x^{\alpha} + a(x^{\alpha})) = a(x^{\alpha})$

7) $a(x^{\alpha} + x^{\alpha+\beta}) = a(x^{\alpha})$

8) $x^{\alpha} \cdot o(x^{\beta}) = o(x^{\alpha+\beta})$

9) $o(x^{\alpha}) \cdot o(x^{\beta}) = o(x^{\alpha+\beta})$

10) $\dfrac{o(x^{\alpha+\beta})}{x^{\beta}} = o(x^{\alpha})$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $\alpha, \beta > 0$.

Oss: $o(x^\alpha) - o(x^\alpha)$

$= o(x^\alpha)$.

Es: $x^2 = o(x)$, $x^3 = o(x)$

$x^2 - x^3 \neq 0$.

$x^2 - x^3 = o(x)$.

sappiamo che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \sin x - x = o(x)$$

$$\Rightarrow \quad \sin x = x + o(x) \; .$$

per $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad x \to 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$$

fate i conti come prima

$$\Rightarrow \operatorname{tg} x = x + \alpha(x).$$

sempre dai limiti notevoli ricaviamo

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

$$\log(1+x) = x + o(x)$$

Es: $(\operatorname{tg} x)^2 = ?$

$$\operatorname{tg} x = x + o(x)$$

$$(\operatorname{tg} x)^2 = (x + o(x))^2 =$$

$$= x^2 + 2x\,o(x) + (o(x))^2 =$$

$$= x^2 + o(x^2) + o(x^2)$$

$$= x^2 + o(x^2)$$

Es:
$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(\sin^2 x) - 1}{x^4}$$

$\cos(\sin^2 x) - 1 =$

$(\sin x = x + o(x))$

$= \cos\left[(x + o(x))^2\right] - 1 =$

$= \cos\left(x^2 + o(x^2)\right) - 1 = (*)$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

se $t \to 0$

la applico con $t = x^2 + o(x^2)$

lo posso fare?

Sì perché se $x \to 0$

$\Rightarrow x^2 + o(x^2) \to 0$

$$\circledast = \cancel{1} - \frac{\big(\overbrace{x^2 + o(x^2)}^{t}\big)^2}{2} + o\Big(\big(\underbrace{x^2 + o(x^2)}_{t}\big)^2\Big) - \cancel{1}$$

$$= - \frac{x^4 + 2x^2 o(x^2) + (o(x^2))^2}{2} + o(\ \cdots\ )$$

$$= - \frac{x^4 + o(x^4) + o(x^4)}{2} + o(\cdots)$$

$$= - \frac{x^4 + o(x^4)}{2} + o\big((x^4 + o(x^4))\big)$$

$$= -\frac{x^4}{2} \underbrace{- \frac{o(x^4)}{2}}_{\text{è } o(x^4)} + o(x^4) =$$

$$= -\frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\cos(\sin^2 x) - 1}{x^4} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^4}{2} + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{2} + \overbrace{\lim_{x \to 0} \frac{o(x^4)}{x^4}}^{0}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

Def: Si dice che f è O-grande di g per x che tende a x_0 se $\frac{f(x)}{g(x)}$ è limitata in un intorno di x_0

e si scrive $f = O(g)$.

Vuol dire che $\exists\, M > 0$ e un intorno U di x_0 t.c. se $x \in U \setminus \{x_0\}$ allora

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq M.$$

Es: $f(x) = x \sin x \qquad g(x) = x$

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = \left| \frac{x \sin x}{x} \right| = |\sin x| \leq 1$$

$$\Rightarrow \quad f = O(g)$$

in questo caso è vero $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}$.

Es: $f(x) = e^x - 1$, $g(x) = x$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ quindi la funzione

$\frac{e^x - 1}{x}$ è limitata in un intorno

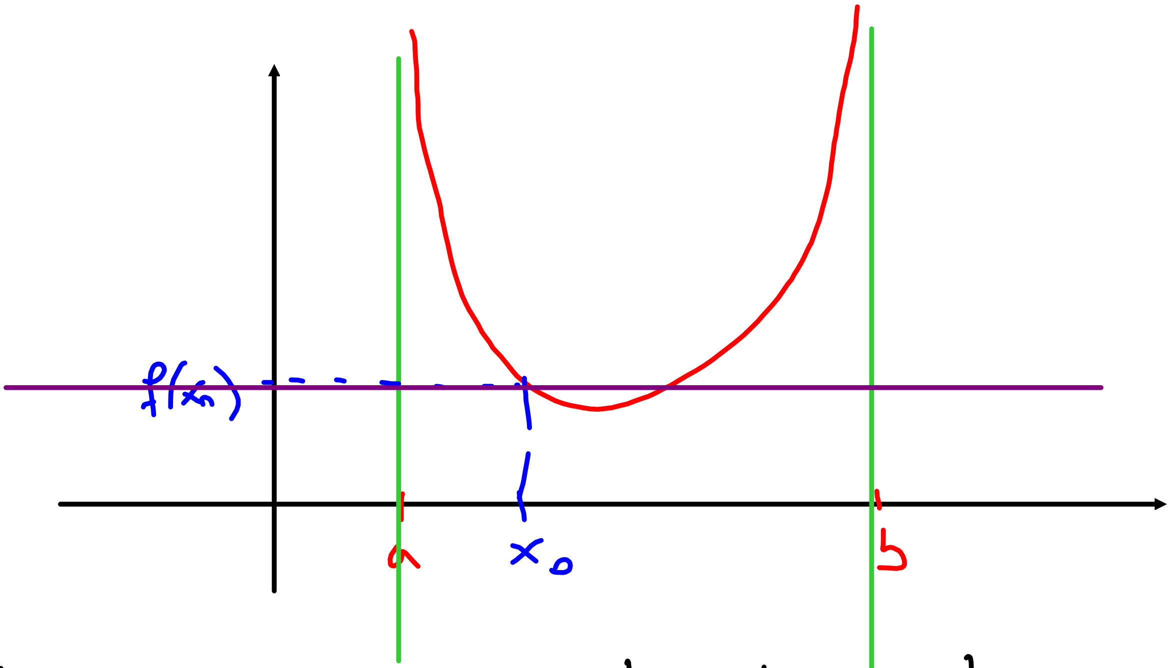
di 0, cioè $\exists\ M > 0$ t.c.

$$\left| \frac{e^x - 1}{x} \right| \leq M \quad \forall x \text{ in un intorno di } 0,\ x \neq 0$$

$\Rightarrow \quad e^x - 1 = O(x)$ per $x \to 0$.

Prop: $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ continua.

Se $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$ allora f ha minimo.



butto via un piccolo intervallo aperto a destra di a e uno a sinistra di b.

Ovviamente se

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty$$

$\Rightarrow f$ ha massimo.

Es: $f: (0,1) \to \mathbb{R}$

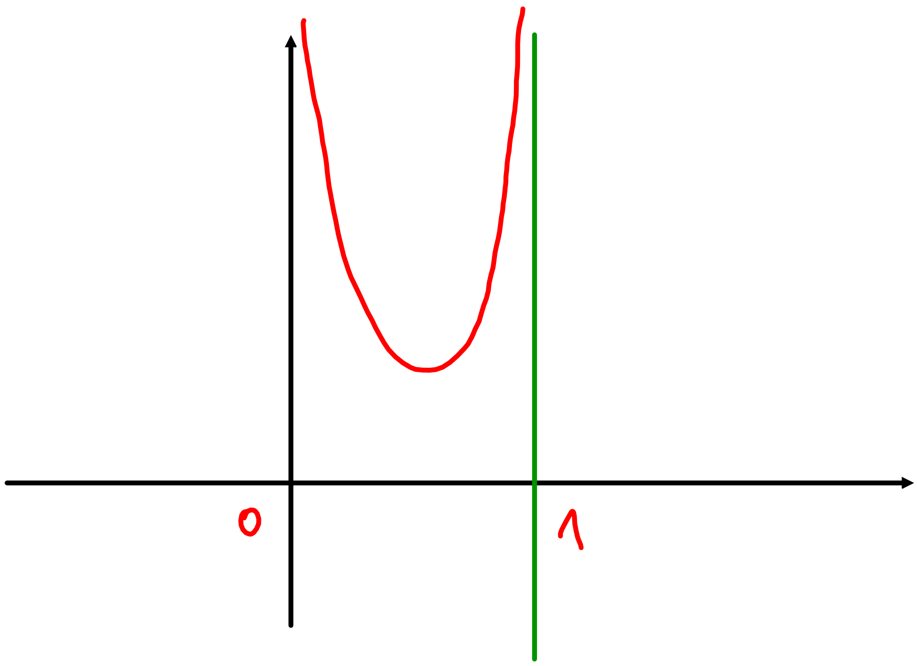
$$f(x) = \frac{1}{x - x^2}$$

$$\frac{1}{x - x^2} = \frac{1}{x(1-x)}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{0^+ \cdot 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x(1-x)} =$$

$$= \frac{1}{1(1-1^-)} = \frac{1}{1 \cdot 0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$



f ha minimo.

Teorema (Weierstrass generalizzato)

Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ e $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$.

con f continua t.c. esistono

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = l_1 \quad , \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = l_2$$

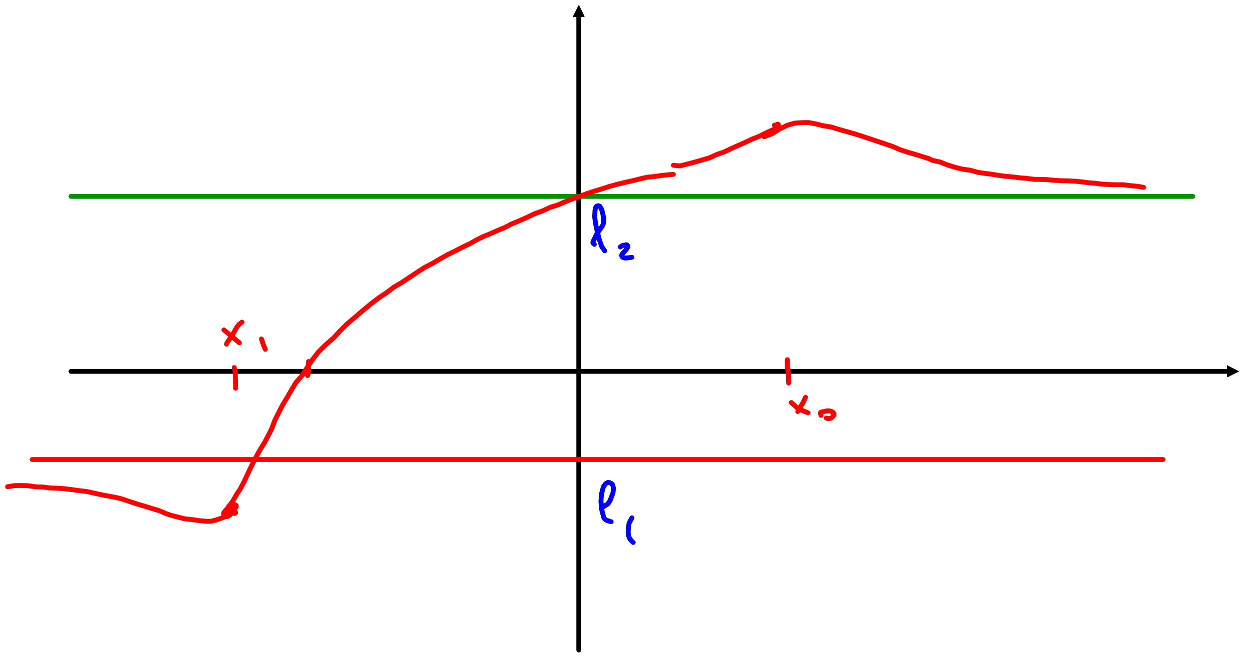
con $l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$.

1) Se $\exists\ x_0$ t.c. $f(x_0) \geq \max\{l_1, l_2\}$

allora f ha massimo

2) Se $\exists\ x_1$ t.c. $f(x_1) \leq \min\{l_1, l_2\}$

allora f ha minimo.



x_1
x_0
ℓ_2
ℓ_1

Es: $\quad f(x) = \dfrac{x^2 + x|x| + x}{1+x^2} \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + x}{1+x^2} & \text{se } x \geq 0 \\[2ex] \dfrac{x}{1+x^2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0.$

vediamo se esiste x_0 t.c. $f(x_0) \geq 2$.

Cerchiamo $x_0 \geq 0$ quindi risolviamo

$$\frac{2x^2 + x}{1+x^2} \geq 2 \iff 2x^2 + x \geq 2 + 2x^2 \iff x \geq 2$$

quindi f ha massimo.

Vediamo se $\exists\, x_1$ t.c. $f(x_1) \leq 0$. In questo caso lo cerchiamo < 0. Quindi

$$\frac{x}{1+x^2} < 0 \iff x < 0 .$$

Allora f ha anche minimo.